12 Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.
3. On pose
$g(x) = a(bx+1)\ln(bx+1) - b(ax+1)\ln(ax+1)$
Calculer $g'(x)$ et en déduire que f est strictement croissante sur chacun des intervalles
$]-\dfrac{1}{b}, 0[$ et $]0,+\infty[$.
4. Montrer que $\ln\left(\dfrac{a}{b}+1\right).\ln\left(\dfrac{b}{a}+1\right) < (\ln 2)^2$.

13 1. Etudier les variations des fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u(x) = \ln x - \dfrac{x-1}{x}$ et $v(x) = x - 1 - \ln x$.

2. En déduire que $\dfrac{x-1}{x} < \ln x < x-1$, pour $x > 0$.

3. Utiliser l'inégalité précédente pour déduire que
$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e < \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n}$ n entier, $n \geq 2$.

14 1. Montrer que pour
$t \geq 0, 1 - t \leq \dfrac{1}{t+1} \leq 1 - t + t^2$.
2. En déduire que pour tout
$x \geq 0, x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.
3. Soit la fonction f définie par
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
a. Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
b. Montrer que f est continue en 0 à droite.
c. Montrer que f est dérivable à droite en 0 et préciser le nombre $f'_d(0)$.

15 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Tracer la fonction $x \mapsto \ln x$.
Pour tout entier un entier $n \geq 2$, on pose
$S_n = \ln 1 + \ln 2 + ... + \ln n$ et
$T_n = \ln 1 + \ln 2 + ... + \ln(n-1)$.

1. Montrer que $T_n \leq \int_1^n \ln x\,dx \leq S_n$.

2. En déduire que $\ln((n-1)!) \leq n\ln n - n + 1 \leq \ln(n!)$.

Puis que $e\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq ne\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

16 Soit f la fonction définie par
$f(x) = (x+1)\ln|x-3|$.
On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Préciser l'ensemble de définition D de f.
2. a. Vérifier que si $x \in D$ alors
$f'(x) = \dfrac{x+1}{x-3} + \ln|x-3|$.
b. Calculer $f''(x)$.
En déduire les variations de f'.
c. Montrer que f' s'annule sur $]-\infty,3[$ pour une valeur de α.
Donner un encadrement de α d'amplitude 0.1
Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty,3[$.
d. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]3,+\infty[$.
3. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D_f.
Préciser les asymptotes éventuelles à C.
4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses.
5. Tracer la courbe C.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn